



# Quelques remarques sur les coques piézoélectriques

Michel Bernadou, Christophe Haenel

## ► To cite this version:

Michel Bernadou, Christophe Haenel. Quelques remarques sur les coques piézoélectriques. [Rapport de recherche] RR-2367, INRIA. 1994. inria-00074311

**HAL Id: inria-00074311**

**<https://hal.inria.fr/inria-00074311>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

## *Quelques remarques sur les coques piézoélectriques*

Michel BERNADOU et Christophe HAENEL

**N° 2367**

Juillet 1994

PROGRAMME 6



*apport  
de recherche*



## Quelques remarques sur les coques piézoélectriques

Michel BERNADOU et Christophe HAENEL

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet Modulef

Rapport de recherche n° 2367 — Juillet 1994 — 23 pages

**Résumé :** La modélisation linéaire de coques minces piézoélectriques de forme quelconque nécessite l'utilisation d'une représentation de la géométrie par un ensemble de coordonnées curvilignes. Dans ce travail, nous commençons par donner un résultat d'existence pour un matériau piézoélectrique occupant un domaine tridimensionnel représenté à l'aide d'un système de trois coordonnées curvilignes. Puis, nous particularisons ce résultat au cas d'une coque piézoélectrique tridimensionnelle, et finalement, nous montrons comment ce résultat d'existence peut être étendu à des théories bidimensionnelles incluant, ou non, l'effet de déformations de cisaillement transverse.

*(Abstract: pto)*

A paraître (en anglais) dans les Actes du Colloque "Second International Conference on Computational Structures Technology", Athènes, 30 Août-1er Septembre 1994

## Some remarks on piezoelectric shells

**Abstract:** The modelization of general linear piezoelectric thin shells requires the use of a representation of the geometry by a set of curvilinear coordinates. In this paper, we start by giving an existence result for a general piezoelectric material the representation of which uses curvilinear coordinates. Then we particularize such a result to a three-dimensional piezoelectric shell, and, finally, we show how this existence result can be extended to two-dimensional theories including, or not, the effect of transverse shear strains.

# 1 Introduction

La piézoélectricité peut être considérée comme une interaction entre deux phénomènes [1] :

- l'effet direct de piézoélectricité : une déformation mécanique d'un matériau génère un champ électrique dans le matériau ;
- l'effet inverse de piézoélectricité : l'application au matériau d'un champ électrique, ou d'une différence de potentiel, génère une déformation.

Ces phénomènes de piézoélectricité ont été découverts en 1880 par Jacques et Pierre Curie; ces propriétés sont de plus en plus utilisées dans l'industrie depuis ces dix ou quinze dernières années, en particulier pour exercer un contrôle actif de certaines structures élastiques : dans cette direction, en utilisant un système distribué de capteurs et d'actionneurs répartis à l'intérieur ou sur la surface du matériau, on peut atténuer ou même stopper les vibrations d'une structure. L'utilisation croissante de ces matériaux piézoélectriques est principalement liée au fait que

- ces efforts peuvent être obtenus sans appliquer de charge mécanique ;
- capteurs et actionneurs sont très légers : ils peuvent être collés sur le matériau sans changer de manière significative le poids ou les propriétés dynamiques de la structure.

Au delà du contrôle de vibrations, de tels matériaux peuvent être utilisés pour contrôler la forme des hélices, des ailes d'avion, des miroirs de télescopes ainsi que pour contrôler la fatigue de matériaux, d'organes artificiels en biomécanique et bien d'autres choses. Une présentation détaillée de ces diverses possibilités peut être trouvée par exemple dans [1] [2] [3].

## 2 Représentation géométrique dans $\mathcal{E}^3$ par un système de coordonnées curvilignes

Soit  $\mathcal{E}^3$  l'espace euclidien habituel et soit  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  un système orthonormé de référence. Tout point  $M$  de  $\mathcal{E}^3$  peut être repéré par

$$\overrightarrow{OM} = x^i \vec{e}_i,$$

où nous utilisons, ici et par la suite, la convention de sommation sur les indices répétés, une fois en position supérieure et une fois en position inférieure. L'ensemble de variation de ces indices est  $\{1, 2, 3\}$  pour les indices latins, et  $\{1, 2\}$  pour les indices grecs. Ce point  $M$  peut aussi être rapporté à un système de coordonnées curvilignes  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  tel que

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

avec

$$\det \left( \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right) \neq 0.$$

Ainsi, à tout point  $M$  (voir figure 1), nous associons deux bases locales différentes, i.e.,

$$\left( \vec{g}_i = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \vec{e}_j \right), \text{ (base covariante),} \quad (1)$$

$$(\vec{g}^j), \text{ tel que } \vec{g}^j \cdot \vec{g}_i = \delta_i^j \text{ (base contravariante),}$$

où  $\delta_i^j = 0$  si  $j \neq i$ , et 1 si  $j = i$ .

A ces bases covariantes et contravariantes, nous associons les composantes contravariantes ou covariantes d'un tenseur. Par exemple pour un vecteur (tenseur d'ordre un), nous obtenons

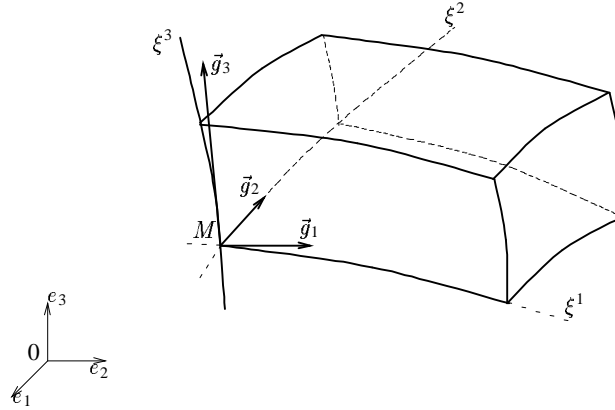


Figure 1 : Repères de référence local et global

$$\vec{v} = v_i \vec{g}^i = v^i \vec{g}_i,$$

et pour un tenseur d'ordre deux

$$T = T_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = T_i^j \vec{g}^i \otimes \vec{g}_j = T_{\cdot j}^i \vec{g}_i \otimes \vec{g}^j = T^{ij} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j.$$

Le passage entre composantes covariantes, mixtes ou contravariantes est assuré par les tenseurs métriques  $(g_{ij})$  ou  $(g^{ij})$ , i.e.,

$$v^i = g^{ij} v_j, \quad T_i^j = g_{ik} T^{kj} = g^{jk} T_{ik}.$$

Comme les bases locales  $(\vec{g}_i)$  ou  $(\vec{g}^i)$  ne sont pas orthonormées, la dérivation d'un tenseur est facilitée par l'introduction des symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ . En effet considérons par exemple le vecteur

$$\vec{v} = v^i \vec{g}_i ;$$

sa dérivée s'écrit

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^j} = \vec{v}_{,j} = v_{i,j} \vec{g}_i + v^i \vec{g}_{i,j}.$$

Alors, en définissant

$$\Gamma_{ij}^k = \vec{g}^k \cdot \vec{g}_{i,j} = g^{k\ell} \vec{g}_\ell \cdot \vec{g}_{i,j},$$

nous obtenons

$$\vec{g}_{i,j} = \Gamma_{ij}^k \vec{g}_k = \Gamma_{kij}^* \vec{g}^k$$

de telle sorte que

$$\vec{v}_{,j} = v_{i||j} \vec{g}^i = v^i{}_{||j} \vec{g}_i,$$

où les dérivés covariants de  $v_i$  et  $v^i$  sont données par

$$\left. \begin{aligned} v_{i||j} &= v_{i,j} - \Gamma_{ij}^k v_k, \\ v^i{}_{||j} &= v^i{}_{,j} + \Gamma_{kj}^i v^k. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Finalement, nous introduisons l'élément de volume

$$d\mathcal{V} = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad \sqrt{g} = (\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) \cdot \vec{g}_3. \quad (3)$$

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [4, chapitre 1].



### 3 Modélisation du problème piézoélectrique tridimensionnel

Soit  $\mathcal{V}$  le domaine occupé par le milieu piézoélectrique au repos. Nous notons  $\partial\mathcal{V}$  sa frontière que nous supposons régulière. Nous supposons que ce milieu est soumis aux charges suivantes :

(i) charges mécaniques :

- \* un chargement distribué de densité  $\vec{p}$  dans  $\mathcal{V}$  ;
- \* un chargement surfacique distribué de densité  $\vec{q}$  sur une partie  $\partial\mathcal{V}_1^M$  de la frontière  $\partial\mathcal{V}$  ;
- \* le milieu est encastré sur la partie complémentaire  $\partial\mathcal{V}_0^M$  de sa frontière. Nous supposons que  $(\partial\mathcal{V}_0^M) > 0$ .

(ii) charges électriques :

- \* pas de charges électriques dans le milieu ;
- \* potentiel fixé, disons  $\varphi = \varphi_0$  sur la partie  $\partial\mathcal{V}_0^E$  de la frontière (appliqué au moyen d'électrodes). Il est supposé que  $(\partial\mathcal{V}_0^E) > 0$ ;
- \* pas de chargement électrique sur la partie complémentaire  $\partial\mathcal{V}_1^E = \partial\mathcal{V} - \partial\mathcal{V}_0^E$ , i.e.,  $\vec{D} \cdot \vec{n} = 0$ , où  $\vec{D}$  désigne le vecteur de déplacement électrique et où  $\vec{n}$  désigne le vecteur unitaire normal à la frontière.

**Les équations piézoélectriques :** ces équations sont détaillées par exemple dans [1,5,6] lorsqu'un repère orthonormal est utilisé et dans [7] pour une représentation à l'aide d'un système de coordonnées curvilignes général. Il est intéressant d'utiliser ces références avec la présentation donnée dans [4] pour les équations d'élasticité tridimensionnelle exprimées à l'aide d'un système de coordonnées curvilignes générales. Nous notons

$\sigma^{ij}$  = composantes du tenseur de contraintes ( $(\sigma) = \sigma^{ij} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j$ )  
 $D^i$  = composantes contravariantes du déplacement électrique ( $\vec{D} = D^i \vec{g}_i$ )  
 $n_i = \vec{n} \cdot \vec{g}_i$  composantes de la normale extérieure unitaire à  $\partial\mathcal{V}$   
 $E_i$  = composantes covariantes du champ électrique ( $\vec{E} = E_i \vec{g}^i$ )  
 $\varphi$  = potentiel électrique  
 $\vec{u}^*$  = vecteur déplacement,  $u^* = u_i^* \vec{g}^i$   
 $\gamma_{ij}^*$  = composantes du tenseur de déformation.

Par définition, nous avons

$$E_i = -\varphi_{||i} = -\varphi_{,i} \quad (4)$$

$$\gamma_{ij}^* (\vec{u}^*) = \frac{1}{2} (u_{i||j}^* + u_{j||i}^*). \quad (5)$$

Alors, les équations peuvent être écrites :

(i) équations d'équilibre :

$$-\sigma^{ij}_{||j} = p^i \text{ dans } \mathcal{V}, \quad (6)$$

$$\vec{u}^* = \vec{0} \text{ dans } \partial\mathcal{V}_0^M, \quad (7)$$

$$\sigma^{ij} n_j = q^i \text{ sur } \partial\mathcal{V}_1^M. \quad (8)$$

(ii) équations de Maxwell-Gauss :

$$D^i_{||i} = 0 \text{ dans } \mathcal{V}, \quad (9)$$

$$\varphi = \varphi_0 \text{ sur } \partial\mathcal{V}_0^E, \quad (10)$$

$$D^i n_i = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{V}_1^E. \quad (11)$$

Il reste à préciser les lois constitutives pour pouvoir exprimer toutes ces équations comme fonction des inconnues principales du problème, i.e.,  $u_i^*$  et  $\varphi$ .

**Lois constitutives :**

$$\sigma^{ij}(\vec{u}^*, \varphi) = C^{ijkl} \gamma_{kl}^* (\vec{u}^*) - e^{mij} E_m(\varphi) \quad (12)$$

$$D^i(\vec{u}, \varphi) = e^{ikl} \gamma_{kl}^* (\vec{u}) + e^{ij} E_j(\varphi) \quad (13)$$

où les coefficients  $C^{ijkl}$ ,  $e^{mij}$ ,  $e^{ij}$  satisfont les propriétés

$$\left. \begin{aligned} C^{ijkl} &= C^{jikl} = C^{klij} \\ C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} &\geq \alpha \sum_{i,j=1}^3 (\varepsilon_{ij})^2, \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in \mathbb{R} \\ \alpha &= \text{constante} > 0, \end{aligned} \right\}$$

$$e^{mij} = e^{mji},$$

$$\left. \begin{aligned} e^{ij} &= e^{ji} \\ e^{ij} w_i w_j &\geq \beta \sum_{i=1}^3 (w_i)^2, \quad \forall w_i \in \mathbb{R} \\ \beta &= \text{constante} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

**Inconnues principales :** la substitution des équations (12) (13) dans les équations (6) et (9) montre que ces équations dépendent seulement de  $\vec{u}$  et  $\varphi$  qui sont les inconnues principales, i.e.,

$$u_i^* = \vec{u} \cdot \vec{g}_i = \text{composantes du champ de déplacement}$$

$$\varphi = \text{potentiel.}$$

Avant de donner la formulation variationnelle du problème, il est commode de remplacer la condition aux limites non homogène (10) par une condition homogène. Pour cela, nous supposons qu'il existe une fonction  $\hat{\varphi}$  définie sur  $\mathcal{V}$  telle que

$$\hat{\varphi}|_{\partial \mathcal{V}_0^E} = \varphi_0$$

et nous posons

$$\bar{\varphi} = \varphi - \hat{\varphi}. \quad (15)$$

Alors,

$$\bar{\varphi} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{V}_0^E$$

et le nouvel ensemble d'inconnues principales est  $(\vec{u}_i, \bar{\varphi})$ . En substituant (15) dans les relations (12) (13), nous obtenons

$$\sigma^{ij}(\vec{u}, \varphi) = \sigma^{ij}(\vec{u}, \bar{\varphi}) - e^{mij} E_m(\hat{\varphi})$$

$$D^i(\vec{u}, \varphi) = D^i(\vec{u}, \bar{\varphi}) + e^{ij} E_j(\hat{\varphi})$$

de telle sorte que les équations (6) à (11) deviennent

$$-\sigma^{ij}(\vec{u}, \bar{\varphi})\|_j = p^i - (e^{mij} E_m(\hat{\varphi}))\|_j \quad (16)$$

$$D^j(\vec{u}, \bar{\varphi})\|_j = -(e^{ji} E_i(\hat{\varphi}))\|_j \quad (17)$$

avec les conditions aux limites

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ sur } \partial\mathcal{V}_0^M \quad (18)$$

$$\sigma^{ij}(\vec{u}, \bar{\varphi})n_j = q^i + e^{mij} E_m(\hat{\varphi})n_j \text{ sur } \partial\mathcal{V}_1^M \quad (19)$$

$$\bar{\varphi} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{V}_0^E \quad (20)$$

$$D^i(\vec{u}, \bar{\varphi})n_i = -e^{ij} E_j(\hat{\varphi})n_i \text{ sur } \partial\mathcal{V}_1^E. \quad (21)$$

**Formulation variationnelle :** en partant des équations (16) à (21), nous obtenons, au moins formellement, la formulation variationnelle du problème. Pour cela, multiplions l'équation (16) par une fonction test  $\vec{v}_i$  et l'équation (17) par une fonction test  $\psi$ , puis intégrons sur  $\mathcal{V}$  ; nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}} [-\sigma^{ij}(\vec{u}, \bar{\varphi})\|_j \vec{v}_i + D^j(\vec{u}, \bar{\varphi})\|_j \psi] d\mathcal{V} \\ & = \int_{\mathcal{V}} [p^i \vec{v}_i - (e^{mij} E_m(\hat{\varphi}))\|_j \vec{v}_i - (e^{ji} E_i(\hat{\varphi}))\|_j \psi] d\mathcal{V}. \end{aligned} \right\}$$

En utilisant la formule de Green [4, (1.12.39)], i.e.,

$$\int_{\mathcal{V}} w^r \|_r \psi d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} w^r \psi \|_r d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}} w^r \psi n_r dS,$$

nous obtenons grâce à (5) et à la symétrie de  $\sigma^{ij}$  :

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}} [\sigma^{ij}(\vec{u}, \vec{\varphi}) \gamma_{ij}^*(\vec{v}) + D^j(\vec{u}, \vec{\varphi}) E_j(\psi)] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} [p^i \bar{v}_i + e^{mij} E_m(\vec{\varphi}) \gamma_{ij}^*(\vec{v}) - e^{ji} E_i(\vec{\varphi}) E_j(\psi)] d\mathcal{V} \\ &+ \int_{\partial\mathcal{V}} [\sigma^{ij}(\vec{u}, \vec{\varphi}) \bar{v}_i n_j - D^j(\vec{u}, \vec{\varphi}) \psi n_j] dS \\ &- \int_{\partial\mathcal{V}} [e^{mij} E_m(\vec{\varphi}) \bar{v}_i n_j + e^{ji} E_i(\vec{\varphi}) \psi n_j] dS \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

En utilisant les conditions aux limites (18) à (21), la relation (22) peut être réécrite

$$\bar{a}((\vec{u}, \vec{\varphi}), (\vec{v}, \psi)) = \bar{f}(\vec{v}, \psi)$$

où, avec (12) et (13), nous avons posé

$$\left. \begin{aligned} & \bar{a}((\vec{u}, \vec{\varphi}), (\vec{v}, \psi)) \\ &= \int_{\mathcal{V}} [\{C^{ijkl} \gamma_{kl}^*(\vec{u}) - e^{mij} E_m(\vec{\varphi})\} \gamma_{ij}^*(\vec{v}) \\ &+ \{e^{ikl} \gamma_{kl}^*(\vec{u}) + e^{ij} E_j(\vec{\varphi})\} E_i(\psi)] d\mathcal{V} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} & \bar{f}(\vec{v}, \psi) = \int_{\mathcal{V}} [p^i \bar{v}_i + e^{mij} E_m(\vec{\varphi}) \gamma_{ij}^*(\vec{v}) \\ &- e^{ji} E_i(\vec{\varphi}) E_j(\psi)] d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}_1^M} q^i \bar{v}_i dS. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Maintenant, nous pouvons donner la formulation variationnelle de ce problème piézoélectrique linéaire statique tridimensionnel :

$$\left. \begin{aligned} & \text{Trouver } (\vec{u}, \vec{\varphi}) \in \vec{V} \times \Theta \text{ tel que} \\ & \bar{a}((\vec{u}, \vec{\varphi}), (\vec{v}, \psi)) = \bar{f}(\vec{v}, \psi), \quad \forall (\vec{v}, \psi) \in \vec{V} \times \Theta \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

où les formes bilinéaires  $\overset{*}{a}(\cdot, \cdot)$  et  $\overset{*}{f}(\cdot)$  sont données par les relations (23) et (24), et où les espaces  $\vec{V}$  et  $\Theta$  sont donnés par

$$\vec{V} = V \times V \times V, \quad V = \{v \in H^1(\mathcal{V}), v|_{\partial\mathcal{V}_0^M} = 0\}$$

$$\Theta = \{\psi \in H^1(\mathcal{V}) ; \psi|_{\partial\mathcal{V}_0^E} = 0\}.$$

Alors, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (25) :

**Théorème 1 :** *Le problème (25) a une solution et une seule.*

**Démonstration :** Nous utilisons la version généralisée du lemme de Lax-Milgram (voir [8, Théorème 1.3]) dans laquelle la forme bilinéaire  $\overset{*}{a}(\cdot, \cdot)$  n'est plus nécessairement symétrique. On vérifie facilement que :

- \*  $\vec{V} \times \Theta$  est un espace de Hilbert ;
- \*  $\overset{*}{a}(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire,  $\vec{V} \times \Theta$ -continue ;
- \*  $\overset{*}{f}(\cdot)$  est une forme linéaire,  $\vec{V} \times \Theta$ -continue.

Il reste à établir que  $\overset{*}{a}(\cdot, \cdot)$  est  $\vec{V} \times \Theta$ -elliptique, i.e., il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que

$$\left. \begin{aligned} \overset{*}{a}((\vec{v}, \psi), (\vec{v}, \psi)) &\geq \gamma \left\{ \sum_{i=1}^3 \|\vec{v}_i\|_{1,\mathcal{V}}^2 + \|\psi\|_{1,\mathcal{V}}^2 \right\} \\ \forall (\vec{v}, \psi) &\in \vec{V} \times \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Observons que

$$\left. \begin{aligned} &\overset{*}{a}((\vec{v}, \psi), (\vec{v}, \psi)) \\ &= \int_{\mathcal{V}} \{C^{ijkl} \overset{*}{\gamma}_{ij}(\vec{v}) \overset{*}{\gamma}_{kl}(\vec{v}) + e^{ij} E_i(\psi) E_j(\psi)\} d\mathcal{V}. \end{aligned} \right\}$$

La première partie de ce résultat vient de l'extension de la propriété de  $\vec{V}$ -ellipticité du problème tridimensionnel lorsqu'un système de coordonnées curvilignes est utilisé (voir [9]), i.e., il existe une constante  $\delta_1 > 0$  telle que

$$\left. \begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} C^{ijkl} \gamma_{ij}^* (\vec{v}) \gamma_{kl}^* (\vec{v}) d\mathcal{V} &\geq \delta_1 \left( \sum_{i=1}^3 \|v_i^*\|_{1,\mathcal{V}}^2 \right), \\ \forall v^* \in \vec{V}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

La seconde partie de ce résultat vient de (4) (14), de l'hypothèse  $\text{mes.}(\partial\mathcal{V}_0^E) > 0$  et de l'inégalité de Poincaré [10]; alors, il existe une constante  $\delta_2 > 0$  telle que

$$\int_{\mathcal{V}} e^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j} d\mathcal{V} \geq \delta_2 \|\psi\|_{1,\mathcal{V}}^2, \quad \forall \psi \in \Theta. \quad (28)$$

Avec les inégalités (27) et (28), il s'ensuit la propriété (26). ■

## 4 Représentation géométrique d'une coque mince générale

En particulierisant la représentation introduite dans le paragraphe 2, nous définissons maintenant une coque mince générale  $\mathcal{C}$  comme le produit tensoriel de sa surface moyenne  $\mathcal{S}$  par son épaisseur  $e$ .

### La surface moyenne $\mathcal{S}$

Soit  $\mathcal{E}^3$  l'espace euclidien habituel rapporté à un système orthonormal fixe  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , et soit  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert borné du plan euclidien  $\mathcal{E}^2$  avec une frontière  $\Gamma$ . Alors la surface moyenne  $\bar{\mathcal{S}}$  de la coque est l'image dans  $\mathcal{E}^3$  de l'ensemble  $\bar{\Omega}$  (appelé domaine de référence) par l'application  $\vec{\phi}$ :

$$\vec{\phi}: (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega} \subset \mathcal{E}^2 \rightarrow \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2) \in \bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{E}^3.$$

Nous remarquons que  $\partial\mathcal{S} = \vec{\phi}(\Gamma)$  de telle sorte que  $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$  et nous supposons que  $\vec{\phi}$  et  $\Gamma$  sont suffisamment réguliers. En particulier, nous supposons

que tous les points de la surface moyenne  $\bar{S} = \vec{\phi}(\bar{\Omega})$  sont réguliers de telle sorte que les vecteurs

$$\vec{a}_\alpha = \vec{\phi}_{,\alpha} = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

sont linéairement indépendants pour tout  $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}$ . Ces deux vecteurs définissent le plan tangent à la surface  $\bar{S}$  au point  $\vec{\phi}(\xi)$ . Le vecteur normal au plan tangent est donné par

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}.$$

Cet ensemble  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  définit la base locale covariante attachée au point générique  $P$  de la surface moyenne (figure 2). Nous notons  $a_{\alpha\beta}$  et  $b_{\alpha\beta}$  les première et seconde formes fondamentales de la surface moyenne  $\bar{S}$ , i.e.,

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \vec{\phi}_{,\alpha} \cdot \vec{\phi}_{,\beta}$$

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\beta,\alpha}. \quad (29)$$

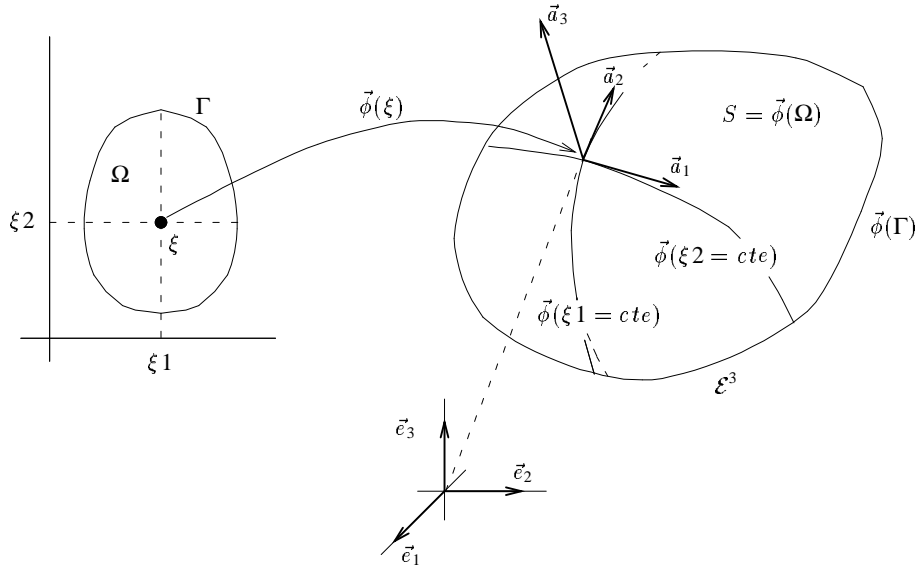


Figure 2 : Définition de la surface moyenne de la coque



A la base covariante  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ , nous associons la base contravariante  $(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3)$  qui est définie par

$$\vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha \text{ et } \vec{a}^3 = \vec{a}_3.$$

Il est intéressant de noter que

$$\vec{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \vec{a}^\beta, \quad \vec{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}^\beta$$

où  $(a^{\alpha\beta})$  est l'inverse de la matrice  $(a_{\alpha\beta})$ . En utilisant ces tenseurs métriques  $(a_{\alpha\beta})$  et  $(a^{\alpha\beta})$ , nous pouvons définir les composantes mixtes et contravariantes d'un tenseur ; par exemple, dans le cas particulier du tenseur symétrique (b), il vient :

$$b_{\alpha}^{\beta} = b_{\alpha}^{\beta} = b_{\alpha}^{\beta} = a^{\beta\lambda} b_{\lambda\alpha} ; \quad b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} b_{\lambda\mu},$$

et, inversement,

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda} = a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} b^{\lambda\mu}.$$

Cette seconde forme fondamentale donne les courbures de la surface moyenne. En particulier, en tout point  $P$  de la surface moyenne, la courbure moyenne  $H$  et la courbure totale  $K$  sont des paramètres intrinsèques de la surface moyenne donnés par

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{N_1}} + \frac{1}{R_{N_2}} \right) = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} ; \\ K &= \frac{1}{R_{N_1} R_{N_2}} = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

où  $\frac{1}{R_{N_1}}$  et  $\frac{1}{R_{N_2}}$  désignent le minimum et le maximum de la courbure normale de la surface moyenne  $\mathcal{S}$  au point  $P$ . En outre, à l'aide de (29), nous obtenons

$$\vec{a}_{3,\alpha} = -b_{\alpha}^{\lambda} \vec{a}_{\lambda}. \quad (31)$$

Finalement l'élément d'aire  $d\mathcal{S}$  de la surface moyenne est donné par

$$d\mathcal{S} = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| d\xi^1 d\xi^2 = \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2.$$

Naturellement, par analogie avec le paragraphe 2, nous pourrions définir les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  et les dérivées covariantes sur la surface moyenne. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [4,11].

### La coque mince $\mathcal{C}$

Aux coordonnées curvilignes  $(\xi^1, \xi^2)$  qui permettent de décrire la surface moyenne, nous ajoutons la coordonnée  $\xi^3$ , qui est mesurée le long de la normale  $\vec{a}_3$  à  $\mathcal{S}$  au point  $P$ . Ce système  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  est, au moins localement, un système de coordonnées curvilignes de  $\mathcal{E}^3$ . L'épaisseur  $e$  de la coque est définie par l'application

$$e : (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} ; x > 0\}.$$

Alors, la coque  $\mathcal{C}$  est le sous-ensemble fermé de  $\mathcal{E}^3$  défini par

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{E}^3 ; \overrightarrow{OM} = \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \vec{a}_3, (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}, \right. \\ \left. -\frac{1}{2} e(\xi^1, \xi^2) \leq \xi^3 \leq \frac{1}{2} e(\xi^1, \xi^2) \right\}.$$

D'après les relations (1) et (31), les dérivées du vecteur  $\overrightarrow{OM} = \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \vec{a}_3$  donnent

$$\vec{g}_\alpha = (\delta_\alpha^\nu - \xi^3 b_\alpha^\nu) \vec{a}_\nu ; \vec{g}_3 = \vec{a}_3. \quad (32)$$

Les vecteurs  $\vec{g}_1$  and  $\vec{g}_2$  sont parallèles au plan tangent à la surface moyenne  $\mathcal{S}$  au point  $P$  tandis que le vecteur  $\vec{g}_3$  est normal à ce plan. Il est démontré dans [11, section 2.1] que  $(M, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$  est un repère local en tout point  $M$  de la coque  $\mathcal{C}$ .

Finalement, d'après [4, § 10.1], l'élément de volume (3) peut être écrit ici

$$d\mathcal{C} = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \sqrt{\frac{g}{a}} d\mathcal{S} d\xi^3 \quad (33)$$

où

$$\sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - 2H\xi^3 + K(\xi^3)^2 \quad (34)$$

et où  $H$  et  $K$  sont donnés par (30). Il est intéressant de noter que pour une coque mince, nous avons [11, § 2.1]

$$|H| \leq \frac{1}{10e}, \quad |K| \leq \frac{1}{100e^2},$$

de telle sorte que

$$1 - 2H\xi^3 + K(\xi^3)^2 \geq \frac{89}{100}. \quad (35)$$

## 5 Coques Minces Piézoélectriques

L'obtention de modélisations bidimensionnelles de coques minces piézoélectriques dépasse le cadre de ce travail. Dans cette direction, mentionnons les travaux [3 et 12 à 15] qui restreignent la représentation de la surface moyenne à des coordonnées curvilignes donnant les lignes principales de courbure, et [7] qui utilise des coordonnées curvilignes générales. Ajoutons que les justifications mathématiques de telles équations sont ouvertes, même pour des déformations d'origine purement mécanique : dans ce cas, il convient de mentionner les travaux récents [16 à 22] qui justifient mathématiquement, à l'aide des techniques d'analyse asymptotique, les équations de coques minces à membrane dominante, ou bien, à flexion dominante. Mais à notre connaissance, les justifications mathématiques des modélisations classiques de Naghdi [23,24] ou de Koiter [25] restent ouvertes.

Bien que nous n'ayons pas de formulation variationnelle explicite des coques minces piézoélectriques, nous donnons ci-après un théorème général d'existence et d'unicité valable pour des modélisations qui prennent en compte, ou non, les effets de déformation de cisaillement transverse. Plus précisément, ce théorème permet de prendre en compte n'importe quelle modélisation de coque mince piézoélectrique dont la partie purement mécanique entre dans le cadre des études d'existence et d'unicité développées dans [11,26,27].

### Equations bidimensionnelles de coques minces piézoélectriques

L'idée de base des équations bidimensionnelles de coques minces est de tirer parti de la faible épaisseur de la structure tridimensionnelle pour intégrer sur l'épaisseur, et d'obtenir ainsi des théories bidimensionnelles formulées sur la surface moyenne  $\mathcal{S}$ , ou, mieux encore, sur le domaine de référence plan  $\Omega$ . Dans cette direction, les théories les plus classiques sont basées sur les deux hypothèses suivantes :

(i) Théories prenant en compte les déformations de cisaillement transverse [23,24] :

- \* les particules situées le long des normales avant déformation restent alignées après déformation sur une ligne qui n'est généralement plus normale à la surface moyenne déformée ; alors

$$\vec{u}^*(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \simeq \vec{u}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \beta_\alpha(\xi^1, \xi^2) \vec{a}^\alpha, \quad (36)$$

$\beta_\alpha =$  composantes de la rotation de la normale ;

\* les contraintes sont approximativement planes et parallèles au plan tangent, i.e.,

$$\sigma^{*3\alpha} = \sigma^{*\alpha 3} = \sigma^{*33} = 0. \quad (37)$$

Dans ces théories, les inconnues principales sont  $u_i(\xi^1, \xi^2) = \vec{u}(\xi^1, \xi^2) \cdot \vec{a}_i(\xi^1, \xi^2)$  et  $\beta_\alpha(\xi^1, \xi^2)$ .

(ii) Théories négligeant les effets de cisaillement transverse [25] : les hypothèses sont similaires mais cette fois-ci les normales à la surface moyenne restent normales à la surface moyenne durant la déformation. Dans ce cas, les équations (37) restent valables tandis que l'équation (36) est remplacée par

$$\vec{u}^*(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \simeq \vec{u}(\xi^1, \xi^2) - \xi^3 u_{3,\alpha}(\xi^1, \xi^2) \vec{a}^\alpha. \quad (38)$$

Dans ces modélisations, les inconnues principales sont les trois composantes  $u_i(\xi^1, \xi^2) = \vec{u}(\xi^1, \xi^2) \cdot \vec{a}_i(\xi^1, \xi^2)$ .

Au delà de ces hypothèses concernant l'expression du vecteur déplacement  $\vec{u}^*(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  dans l'épaisseur, nous devons indiquer comment le potentiel  $\bar{\varphi}$  se comporte dans l'épaisseur de la coque. Supposons ici qu'il puisse être développé comme suit

$$\bar{\varphi}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi^3)^n}{n!} \bar{\varphi}_n(\xi^1, \xi^2). \quad (39)$$

Alors, en substituant les expressions du type (2) (32) (33) (34) (36) (ou (38)), (37) (39)... dans la formulation variationnelle (25) et par intégration sur l'épaisseur, nous pouvons obtenir les théories bidimensionnelles approchées. Ces théories dépendent des hypothèses de base (36) à (39) mais aussi de diverses simplifications plus ou moins bien justifiées... Une discussion approfondie de ces différents aspects est bien au-delà de l'objectif de ce papier !

Nous concluons par le résultat suivant qui semble être très intéressant au plan des applications tant pour l'étude du problème direct que pour l'étude des problèmes inverses associés.

**Théorème 2 :** Toute formulation variationnelle bidimensionnelle de coque mince piézoélectrique

- (a) qui est obtenue à partir d'une formulation tridimensionnelle (25) par intégration sur l'épaisseur (comme décrit plus haut),
- (b) qui redonne une formulation variationnelle purement mécanique entrant dans le cadre des théorèmes d'existence et d'unicité de [26,27],
- (c) qui est obtenue en restreignant le développement du potentiel aux trois premiers termes, i.e.,

$$\bar{\varphi}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \bar{\varphi}_0(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \bar{\varphi}_1(\xi^1, \xi^2) + \frac{1}{2} (\xi^3)^2 \bar{\varphi}_2(\xi^1, \xi^2) \quad (40)$$

- (d) qui est obtenue pour un potentiel donné  $\varphi_0$  appliqué le long de la partie  $\partial\mathcal{C}_0$  de la frontière latérale de la coque  $\mathcal{C}$ ,

a une solution et une seule.

**Démonstration :** Ces formulations variationnelles bidimensionnelles linéaires de coques minces piézoélectriques sont clairement du même type que (25) mais, maintenant, les intégrations qui restent à effectuer sont effectuées sur  $\mathcal{S}$  ou, de manière équivalente, sur  $\Omega$ . En particulier, les espaces fonctionnels associés sont des espaces de Hilbert, les formes associées  $a(\cdot, \cdot)$  et  $f(\cdot)$  sont bilinéaire et linéaire, et elles sont toutes deux continues. Alors, pour appliquer la version généralisée du lemme de Lax-Milgram [8, théorème 1.3] et pour conclure, il reste à prouver que  $a(\cdot, \cdot)$  est elliptique.

Notre résultat est basé sur les remarques suivantes :

- (i) à partir de (23), nous obtenons pour tout  $(\vec{v}, \psi) \in \vec{V} \times \Theta$

$$^*a((\vec{v}, \psi), (\vec{v}, \psi)) = ^*a_M(\vec{v}, \vec{v}) + ^*a_E(\psi, \psi) \quad (41)$$

avec

$$^*a_M(\vec{v}, \vec{v}) = \int_{\mathcal{C}} C^{ijkl} \gamma_{ij}^*(\vec{v}) \gamma_{kl}^*(\vec{v}) d\mathcal{C},$$

$$^*a_E(\psi, \psi) = \int_{\mathcal{C}} e^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j} d\mathcal{C} \quad (42)$$

de telle sorte que le résultat global d'ellipticité dépend de

- \* l'ellipticité de la forme bilinéaire bidimensionnelle approchée  $a_M(\cdot, \cdot)$  associée à (41); celle-ci est assurée grâce à l'hypothèse (b). Plus précisément, deux cas sont à considérer :

**Cas 1 :** pour une modélisation bidimensionnelle incluant les effets de cisaillement transverse, nous avons

$$a_M((\vec{v}, \underline{\delta}), (\vec{v}, \underline{\delta})) \geq \alpha \left\{ \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{\beta=1}^2 \|\delta_\beta\|_{1,\Omega}^2 \right\} \quad (43)$$

pour tout  $v_i, \delta_\beta \in \{w \in H^1(\Omega) ; w|_{\Gamma_0} = 0\}$ , où  $\alpha$  est une constante  $> 0$ ;

**Cas 2 :** pour une modélisation bidimensionnelle ne prenant pas en compte les effets de cisaillement transverse, nous avons

$$a_M(\vec{v}, \vec{v}) \geq \alpha \left( \sum_{\beta=1}^2 \|v_\beta\|_{1,\Omega}^2 + \|v_3\|_{2,\Omega}^2 \right) \quad (44)$$

pour tout  $v_\beta \in \{w \in H^1(\Omega) ; w|_{\Gamma_0} = 0\}$  et tout  $v_3 \in \{w \in H^2(\Omega) ; w|_{\Gamma_0} = \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma_0} = 0\}$ , où  $\alpha$  est à nouveau une constante  $> 0$ ;

- \* l'ellipticité de la forme bilinéaire bidimensionnelle approchée associée à (42) (voir (ii) ci-après).

(ii) à l'aide des hypothèses (40) et (42), nous obtenons

$$\begin{aligned} a_E((\psi_0, \psi_1, \psi_2), (\psi_0, \psi_1, \psi_2)) &= \int_{\mathcal{C}} e^{ij} (\psi_0 + \xi^3 \psi_1 \\ &+ \frac{1}{2} (\xi^3)^2 \psi_2)_{,i} (\psi_0 + \xi^3 \psi_1 + \frac{1}{2} (\xi^3)^2 \psi_2)_{,j} d\mathcal{C} \end{aligned}$$

et avec (14) et (35) :

$$\begin{aligned} I &= a_E((\psi_0, \psi_1, \psi_2), (\psi_0, \psi_1, \psi_2)) \\ &\geq \frac{89}{100} \beta \int_{\Omega} \left[ \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \sum_{i=1}^3 (\psi_0 + \xi^3 \psi_1 + \frac{1}{2} (\xi^3)^2 \psi_2)_{,i}^2 d\xi^3 \right] \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2. \end{aligned}$$

Comme  $\psi_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ , dépend seulement de  $\xi^1$  et  $\xi^2$ , nous obtenons

$$I \geq \frac{89}{100} \beta \int_{\Omega} \left\{ \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \left[ \sum_{\alpha=1}^2 (\psi_{0,\alpha} + \xi^3 \psi_{1,\alpha} + \frac{1}{2} (\xi^3)^2 \psi_{2,\alpha})^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (\psi_1 + \xi^3 \psi_2)^2 \right] d\xi^3 \right\} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2,$$

d'où (les exposants impairs en  $\xi^3$  ont une contribution nulle) :

$$I \geq \frac{89}{100} \beta \int_{\Omega} \left\{ \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} [(\psi_{0,1})^2 + (\psi_{0,2})^2 + (\psi_1)^2 \right. \\ \left. + (\xi^3)^2 \{(\psi_2)^2 + (\psi_{1,1})^2 + (\psi_{1,2})^2 + \psi_{0,1}\psi_{2,1} + \psi_{0,2}\psi_{2,2}\} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (\xi^3)^4 \{(\psi_{2,1})^2 + (\psi_{2,2})^2\}] d\xi^3 \right\} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2.$$

Finalement, en notant  $\bar{e} = \min_{\xi \in \Omega} e(\xi) > 0$ ,

$$I \geq \frac{89}{100} \beta \bar{e} \left\{ \frac{1}{4} (|\psi_{0,1}|_{0,\Omega}^2 + |\psi_{0,2}|_{0,\Omega}^2 + 4|\psi_1|_{0,\Omega}^2) \right. \\ \left. + \frac{\bar{e}^2}{12} (|\psi_{1,1}|_{0,\Omega}^2 + |\psi_{1,2}|_{0,\Omega}^2 + |\psi_2|_{0,\Omega}^2) \right. \\ \left. + \frac{7\bar{e}^4}{8640} (|\psi_{2,1}|_{0,\Omega}^2 + |\psi_{2,2}|_{0,\Omega}^2) \right\}$$

d'où, avec l'hypothèse (d) et avec l'inégalité de Poincaré [10], l'existence d'une constante  $\gamma > 0$  telle que

$$a_E((\psi_0, \psi_1, \psi_2), (\psi_0, \psi_1, \psi_2)) \geq \gamma \sum_{i=0}^2 \|\psi_i\|_{1,\Omega}^2. \quad (45)$$

Il reste alors à ajouter les inégalités (43) (ou (44)) et (45) pour obtenir la propriété cruciale d'ellipticité pour la forme quadratique  $a_M(\cdot, \cdot) + a_E(\cdot, \cdot)$ . ■

**Remarque :** dans l'énoncé du théorème 2, l'hypothèse (d) est purement simplificatrice. Un résultat similaire peut être obtenu si le potentiel  $\varphi_0$  est appliqué sur une partie de la surface supérieure ou inférieure de la coque. ■

## 6 Conclusion

Ces résultats donnent des bases mathématiques solides pour aborder d'autres études comme celles des problèmes piézoélastodynamiques, des problèmes piézo-thermoélastiques, de l'utilisation de pastilles piézoélectriques... et, au-delà de ces différents problèmes directs, ces résultats devraient permettre d'aborder les problèmes inverses associés, notamment ceux attachés à la contrôlabilité des structures.

## Références

- [1] IKEDA, T. [1990]: *Fundamental of Piezoelectricity*, Oxford Univ. Press, Oxford.
- [2] ROGERS, C.A. ; ROGERS, R.C. [1992]: *Recent Advances in Adaptive and Sensory Materials and their Applications*, Tecnominc Publishing Co, Lancaster.
- [3] TZOU, H.S. [1993]: *Piezoelectric shells: Distributed sensing and control of continua*, Kluwer Academic publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- [4] GREEN, A.E. ; ZERNA, W. [1968]: *Theoretical Elasticity*, Oxford University Press, 2nd Edition.
- [5] ERINGEN, A.C. ; MAUGIN, G.A. [1990]: *Electrodynamics of Continua, Volume I: Foundations and Solid Media*, Springer-Verlag, New-York.
- [6] MAUGIN, G.A. [1988]: *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*, North-Holland, Amsterdam.
- [7] LE KHAN'CHAU, N.N. [1986]: The theory of piezoelectric shells, *Prikl. Matem. Mekhan. USSR*, Vol. 50, n° 1, pp. 98-105.
- [8] CIARLET, P.G. [1991] Basic error estimates for elliptic problems, in *Handbook of Numerical Analysis* (P.G. Ciarlet and J.L. Lions Editors), Vol. II: Finite Element Methods, Part 1, pp. 17-351, North-Holland, Amsterdam.
- [9] CIARLET, P.G. [1994]: *Théorie Mathématique des Coques, une Introduction Linéairement Elastique*, Ecole de Printemps 1994, INRIA, Rocquencourt.



- [10] NEČAS, J. [1967]: *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris.
- [11] BERNADOU, M.; CIARLET, P.G. [1976]: Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter, in *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering* (R. Glowinski and J.L. Lions Ed.), pp. 89-136, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 134, Springer-Verlag, Berlin.
- [12] ROGACHEVA, N.N. [1981]: Equations of state of piezoceramic shells, *Prikl. Matem. Mekhan. USSR*, Vol. 45, pp. 677-684.
- [13] ROGACHEVA, N.N. [1984]: On boundary conditions in the theory of piezoceramic shells polarized along coordinate lines, *Prikl. Matem. Mekhan. USSR*, Vol. 47,  $n^0$  2, pp. 220-226.
- [14] ROGACHEVA, N.N. [1984]: On Saint-Venant type conditions in the theory of piezoelastic shells, *Prikl. Matem. Mekhan. USSR*, Vol. 48,  $n^0$  2, pp. 213-216.
- [15] ROGACHEVA, N.N. [1986]: Classification of free piezoceramic shell vibrations, *Prikl. Matem. Mekhan. USSR*, Vol. 50,  $n^0$  1, pp. 106-111.
- [16] CIARLET, P.G. [1993]: Modèles bi-dimensionnels de coques : analyse asymptotique et théorèmes d'existence, in *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications* (J.L. Lions and C. Biazchi, Editors), pp. 61-80, Masson, Paris, 1993.
- [17] CIARLET, P.G.; LODS, V. [1994]: Asymptotic analysis of linearly elastic shells, I., "Membrane-dominated" shells (to appear).
- [18] CIARLET, P.G.; LODS, V.; MIARA, B. [1994]: Asymptotic analysis of linearly elastic shells, II., "Bending-dominated shells (to appear).
- [19] CIARLET, P.G.; MIARA, B. [1992a]: On the ellipticity of linear shell models, *Z. Angew Math. Phys.* 43, pp. 243-253.
- [20] SANCHEZ-PALENCIA, E. [1989a]: Statique et dynamique des coques minces. I. Cas de flexion pure non inhibée, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, 309, pp. 411-417.

- 
- [21] SANCHEZ-PALENCIA, E. [1989b]: Statique et dynamique des coques minces. II. Cas de flexion pure inhibée. Approximation membranaire, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, 309, pp. 531-537.
- [22] SANCHEZ-PALENCIA, E. [1990]: Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, 311, pp. 909-916.
- [23] NAGHDI, P.M. [1963]: Foundations of elastic shell theory, in *Progr. Solid Mech.*, Vol. 4, 1-90, North-Holland, Amsterdam.
- [24] NAGHDI, P.M. [1972]: The Theory of Shells and Plates, in *Handbuch der Physik*, Vol. VI a.2, pp. 425-640, Springer-Verlag, Berlin.
- [25] KOITER, W.T. [1966]: On the nonlinear theory of thin elastic shells, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.*, B69, 1-54.
- [26] BERNADOU, M. ; CIARLET, P.G. and MIARA, B. [1994]: Existence theorems for two-dimensional linear shell theories, *J. Elasticity*.
- [27] BERNADOU, M. [1994]: *Méthodes d'Eléments Finis pour les Problèmes de Coques Minces*, Masson, Paris.



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249-6399